

Μελέτη της μετάβασης σε διαφορετικές αναπαραστάσεις μεταβαλλόμενης κίνησης με την εφαρμογή μαθηματικών εννοιών

Γεωργόπουλος Κ., Μπέλλου Ι., Μικρόπουλος Τ.

Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων,
kgeorgop@gmail.com

Σχολική Σύμβουλος Πληροφορικής Ιωαννίνων Άρτας, ibellou@sch.gr
Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης, Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων, amikrop@uoi.gr

Μαθητές και φοιτητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες κατά τη μετάβαση μεταξύ των γραφικών παραστάσεων διαφορετικών φυσικών μεγεθών και την κατανόηση των αντίστοιχων φυσικών φαινομένων. Η παρούσα εργασία μελετά την εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών της κλίσης και του εμβαδού στο πλαίσιο των αναπαραστάσεων των φυσικών μεγεθών θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης στην ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση και σε δύο πειραματικές περιπτώσεις, της αλλαγής του συστήματος αναφοράς και της επιτάχυνσης. Η παρέμβαση υλοποιήθηκε με ένα σύστημα MBL σε φοιτητές θεωρητικής και θετικής – τεχνολογικής κατεύθυνσης. Τα αποτελέσματα της μελέτης δείχνουν ότι οι φοιτητές της θεωρητικής κατεύθυνσης παρουσιάζουν μεγαλύτερη βελτίωση, ξεκινώντας και παραμένοντας όμως σε χαμηλότερα γνωστικά επίπεδα κατά SOLO από τους φοιτητές της θετικής – τεχνολογικής κατεύθυνσης.

Εισαγωγή

Η φυσική αποτελεί το ιδανικό περιβάλλον για την εφαρμογή των μαθηματικών σε ένα εφαρμοσμένο επιστημονικό πλαίσιο. Οι φυσικοί συχνά εκπλήσσονται για το πόσο λίγα μαθηματικά γνωρίζουν οι μαθητές, σε αντιδιαστολή με τις επιδόσεις τους στα μαθήματα των μαθηματικών (Redish 2005). Αυτό οφείλεται στον διαφορετικό τρόπο εφαρμογής των μαθηματικών που δημιουργεί δυσκολίες στο χειρισμό μαθηματικών εννοιών στις γραφικές παραστάσεις και στην ερμηνεία φυσικών φαινομένων μέσω αυτών, στις αλγεβρικές εξισώσεις και στη σχέση μεταξύ φυσικής κατάστασης και της σχετικής μαθηματικής έκφρασης, και στο τι αναπαριστούν τα διανύσματα (Saul et al. 1996).

Η αποτελεσματική χρήση των αναπαραστάσεων στην εκπαίδευση των μαθηματικών και φυσικών επιστημών παρουσιάζει ερευνητικό ενδιαφέρον (NCTM 2000: p.29, Ozgun-Koca 2001). Παρά το ότι όλες οι μορφές των αναπαραστάσεων είναι χρήσιμες στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών και φυσικών επιστημών, ιδιαίτερο ρόλο διαδραματίζουν οι γραφικές παραστάσεις, οι οποίες μπορούν να συνοψίσουν σε μεγάλο βαθμό σύνθετες πληροφορίες ή σχέσεις με αποτελεσματικό τρόπο (Linn et al. 1987).

Ειδικότερα στη μελέτη των κινηματικών φαινομένων οι γραφικές παραστάσεις της θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης θεωρούνται ως ο καλύτερος τρόπος για την κατανόηση μιας αλγεβρικής σχέσης, δεδομένου ότι προσφέρουν μια πολύτιμη εναλλακτική ερμηνεία σε αντιδιαστολή με τη λεκτική και αλγεβρική περιγραφή των φαινομένων προσφέροντας έναν διαφορετικό τρόπο χειρισμού των εννοιών που αναπτύσσονται (Arons 1990, Svec 1999, Ozgun-Koca 2001). Παρόλα αυτά, αποτελέσματα εμπειρικών μελετών δείχνουν ότι πολλοί μαθητές στερούνται δεξιοτήτων δημιουργίας αλλά και ερμηνείας γραφικών παραστάσεων (Lapp 1999, Hadjidemetriou & Williams 2000, Roth 2001, Selden & Selden, 2001).



Οι διαφορετικοί τρόποι προσέγγισης και οι διαφορετικοί διδακτικοί στόχοι στα μαθηματικά και τη φυσική που θεωρούνται ως η βάση των δυσκολιών, παρουσιάζονται συνοπτικά (Ellermeijer & Heck, 2003):

- Στα μαθηματικά, η γραφική παράσταση αναπαριστά ένα απλό αντικείμενο όπως για παράδειγμα μια συνάρτηση. Κύριος σκοπός είναι να δοθεί μια άποψη των ποικίλων όψεων της συνάρτησης. Στη φυσική, η συνάρτηση αναπαριστά μια σχέση μεταξύ δύο φυσικών μεγεθών. Κύριος σκοπός είναι η μελέτη της μεταξύ τους σχέσης.
- Στα μαθηματικά, τα πεδία ορισμού και τιμών της συνάρτησης λαμβάνουν συνήθως άπειρες τιμές, ενώ στη φυσική οι τιμές καθορίζονται από το είδος και το εύρος μεταβολής των μεγεθών.
- Στα μαθηματικά, η αρχή του συστήματος συντεταγμένων συνήθως είναι το σημείο (0, 0), ενώ στη φυσική αντιστοιχεί σε μία επιλεγμένη θέση, τη θέση του παρατηρητή.
- Στα μαθηματικά, οι τιμές στο σύστημα αξόνων είναι αδιάστατοι αριθμοί, ενώ στη φυσική τιμές μεγεθών που εκφράζονται σε συγκεκριμένες μονάδες.
- Στα μαθηματικά, η κλίση, η εφαπτομένη της καμπύλης, είναι ένας αδιάστατος αριθμός με γεωμετρική μόνο ερμηνεία, ενώ στη φυσική αναπαριστά ένα φυσικό μέγεθος και συνδέει την αλλαγή ενός μεγέθους σε σχέση με ένα άλλο.

Παρανοήσεις που προέρχονται από τις γραφικές παραστάσεις στη φυσική, σχετίζονται με το γεγονός ότι μαθητές και φοιτητές δεν αντιλαμβάνονται τη γραφική παράσταση ως μια σχέση μεταξύ μεταβλητών, αλλά σαν εικόνα (graph as a picture). Επίσης, παρερμηνεύουν μεταξύ της μορφής της γραφικής παράστασης και της εικόνας της πειραματικής διαδικασίας θεωρώντας ότι πρέπει να έχουν την ίδια μορφή (graph shape and path of motion confusion) (McDermott et al. 1987, Dunham & Osborne 1991, Lenton et al. 2000).

Η δεξιότητα των μαθητών να συνδέουν γραφικές παραστάσεις με φυσικά φαινόμενα φαίνεται ότι είναι κάτι το ξεχωριστό από τις γραφικές δεξιότητες που διδάχθηκαν κατά τη διάρκεια των μαθημάτων στα μαθηματικά (Ellermeijer & Heck 2003).

Οι προτάσεις για την κατανόηση φυσικών φαινομένων από γραφικές παραστάσεις, ιδιαίτερα σε προβλήματα κινηματικής, περιλαμβάνουν παρεμβάσεις κατά τις οποίες μαθητές και φοιτητές έχουν τη δυνατότητα να αναγνωρίσουν ότι η ίδια πληροφορία μπορεί να αναπαρασταθεί με διαφορετικούς τρόπους και να ερμηνεύουν τη σχέση κάθε αναπαράστασης με την πραγματική κίνηση «μεταβαίνοντας» από τη μια στην άλλη (McDermott et al. 1987).

Παρεμβάσεις τέτοιου τύπου προϋποθέτουν την ταυτόχρονη σύνδεση του φαινομένου μέσω του αντίστοιχου πειράματος και των αναπαραστάσεών του (Thornton 1987, Trumper & Gelbman 2002) και τη μετάβαση (transition) μεταξύ των γραφικών παραστάσεων διαφορετικών φυσικών μεγεθών που απεικονίζουν το ίδιο φαινόμενο συμπεραίνοντας την μορφή της μιας από την άλλη (Beichner 1994).

Από τις αποτελεσματικότερες προσεγγίσεις για την άμεση σύνδεση φαινομένου και αναπαραστάσεων προσφέρουν τα εργαστήρια συνδεδεμένα με υπολογιστή (Microcomputer Based Laboratories, MBL). (Thornton 1989). Οι διατάξεις αυτές συνδέουν το πείραμα μέσω αισθητήρων με τον υπολογιστή, ο οποίος μέσω του κατάλληλου λογισμικού καταγράφει πειραματικά δεδομένα, τα επεξεργάζεται και παρουσιάζει τα αποτελέσματα κατά την επιθυμία του χρήστη, με κύριο χαρακτηριστικό τη δημιουργία γραφικών παραστάσεων. Τα βιβλιογραφικά δεδομένα από την αξιοποίηση των MBL στη διδακτική πράξη είναι θετικά, ιδιαίτερα όσον αφορά στη σύνδεση φαινομένου – αναπαράστασης – μαθηματικού συμβολισμού (Beichner 1994, Svec 1999, Ainley et al. 1999). Στο πλαίσιο αυτό η χρήση του υπολογιστή συνδέεται με την οπτικοποίηση που αποτελεί ένα από τα ισχυρότερα εργαλεία για την ερμηνευτική αναπαράσταση της πληροφορίας (Μικρόπουλος 2006).

Η παρούσα εργασία μελετά την εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών της κλίσης και του εμβαδού στο πλαίσιο των αναπαραστάσεων των φυσικών μεγεθών $x(t)$, $v(t)$ και $a(t)$ στην ευθύγραμμη μεταβαλλόμενη κίνηση. Συγκεκριμένα, διερευνάται η δεξιότητα μετάβασης φοιτητών μεταξύ των γραφικών παραστάσεων $x(t)$, $v(t)$ και $a(t)$ του ίδιου φαινομένου σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις, κατά την αλλαγή του συστήματος αναφοράς και κατά την αλλαγή της επιτάχυνσης.

Η ταυτότητα της έρευνας

Θεωρώντας ότι η αλλαγή των αναπαραστάσεων επηρεάζει την οπτική πληροφορία αλλά και την εφαρμογή των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών, μελετάται η εφαρμογή των εννοιών της κλίσης και του εμβαδού σε δύο περιπτώσεις: α) κατά την αλλαγή του συστήματος αναφοράς (θέση παρατήρησης του φαινομένου) και β) κατά την αλλαγή της επιτάχυνσης.

Το δείγμα αποτελείται από 84 πρωτοετείς φοιτητές και φοιτήτριες του Παιδαγωγικού Τμήματος Δημοτικής Εκπαίδευσης στο Πανεπιστήμιο Ιωαννίνων. Οι φοιτητές χωρίστηκαν σε δύο κατηγορίες με βάση την κατεύθυνση που είχαν επιλέξει στο Λύκειο. Η πρώτη κατηγορία αποτελείται από 46 φοιτητές θεωρητικής κατεύθυνσης με ικανοποιητικό βαθμό επίδοσης στα μαθηματικά γενικής παιδείας της Γ' Λυκείου. Η δεύτερη κατηγορία αποτελείται από 38 φοιτητές θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης. Κάθε κατηγορία χωρίζεται σε δύο ισοδύναμες πειραματικές ομάδες, με κριτήριο την επίδοσή τους στα μαθηματικά της γενικής παιδείας της Γ' Λυκείου.

Η διαδικασία περιλαμβάνει την πραγματοποίηση του πειράματος με σύστημα MBL από τους φοιτητές, τη μεταβολή ενός παράγοντα (σύστημα αναφοράς ή επιτάχυνση) που επηρεάζει τις αναπαραστάσεις του φαινομένου, και στη συνέχεια την επανάληψη του πειράματος.

Η πρώτη ομάδα σε κάθε κατηγορία (θεωρητική και θετική – τεχνολογική) μελέτησε την αλλαγή του συστήματος αναφοράς, ενώ η δεύτερη την αλλαγή της επιτάχυνσης.

Κατά τη διάρκεια κάθε πειράματος στην οθόνη του υπολογιστή εμφανίζονται ταυτόχρονα με κοινό άξονα χρόνου, οι αναπαραστάσεις (γραφικές παραστάσεις και αλγεβρικές εξισώσεις) των φυσικών μεγεθών $x(t)$, $v(t)$ και $a(t)$, που αναπαριστούν το ίδιο φυσικό φαινόμενο. Στο περιβάλλον αυτό οι φοιτητές μεταβαίνουν μεταξύ των αναπαραστάσεων χρησιμοποιώντας τις μαθηματικές έννοιες της κλίσης και του εμβαδού.

Η καταγραφή των απαντήσεων των φοιτητών έγινε μέσω ερωτηματολογίου, το οποίο περιλαμβάνει τις ακόλουθες τέσσερις ερωτήσεις με τις συνοδευτικές τους παραστάσεις:

1. Το ακόλουθο διάγραμμα είναι η γραφική παράσταση της μετατόπισης $x(t)$ ενός κινητού κατά το χρονικό διάστημα 5s. Ποια από τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις της ταχύτητας $v(t)$ θα μπορούσε να αναπαραστήσει καλύτερα την κίνηση του κινητού κατά τη διάρκεια του ανωτέρω χρονικού διαστήματος; (μετακίνηση από την παράσταση $x(t)$ στη $v(t)$).
2. Δίνεται το διάγραμμα της ταχύτητας σε συνάρτηση του χρόνου. Ποιο από τα ακόλουθα διαγράμματα της θέσης $x(t)$ θα μπορούσε να αναπαραστήσει καλύτερα την κίνηση του αντικειμένου της κίνησης για το ίδιο χρονικό διάστημα; (μετακίνηση από την $v(t)$ στη $x(t)$).
3. Το ακόλουθο διάγραμμα είναι η γραφική παράσταση της ταχύτητας $v(t)$ ενός κινητού κατά το χρονικό διάστημα 5s. Ποια από τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις της επιτάχυνσης $a(t)$ θα μπορούσε να αναπαραστήσει καλύτερα την κίνηση του κινητού κατά τη διάρκεια του ανωτέρω χρονικού διαστήματος; (μετακίνηση από την $v(t)$ στην $a(t)$).
4. Το ακόλουθο διάγραμμα είναι η γραφική παράσταση της επιτάχυνσης $a(t)$ ενός κινητού κατά το χρονικό διάστημα 5s. Ποια από τις ακόλουθες γραφικές παραστάσεις της ταχύτητας $v(t)$ θα μπορούσε να αναπαραστήσει καλύτερα την κίνηση του κινητού κατά τη διάρκεια του ανωτέρω χρονικού διαστήματος; (μετακίνηση από την παράσταση $a(t)$ στην $v(t)$).



Το ερωτηματολόγιο απαντήθηκε πριν και μετά τη διεξαγωγή τους πειράματος από τους φοιτητές. Κάθε φοιτητής απαντούσε και δικαιολογούσε την απάντησή του.

Για τη σε βάθος μελέτη της γνώσης των φοιτητών επιλέχθηκε ποιοτική ανάλυση των απαντήσεων τους και συγκεκριμένα η ταξινόμια SOLO (Structure of the Observed Learning Outcomes) (Biggs & Collins 1982). Η ταξινόμια κατηγοριοποιεί τις απαντήσεις σε ιεραρχικά επίπεδα, τα οποία εκφράζουν την εξελικτική πορεία της διαδικασίας οικοδόμησης της γνώσης. Παρέχει έναν συστηματικό τρόπο περιγραφής της γνωστικής ιεραρχίας που εμφανίζουν οι φοιτητές κατά την πραγματοποίηση μιας δραστηριότητας.

Σύμφωνα με την ταξινόμια SOLO, η γνώση του φοιτητή μπορεί να καταταχθεί σε κάποιο από τα πέντε παρακάτω ιεραρχικά επίπεδα (Μπέλλου 2003):

1. **Πρώτο επίπεδο προ-δομικό, πρώιμο.** Ο φοιτητής με την απάντηση που δίνει:

- είτε αποφεύγει την ερώτηση (άρνηση, απόκρουση)
- είτε μεταφέρει την ερώτηση καταφατικά (ταυτολογία)
- είτε κάνει έναν άσχετο συνειρμό βασισμένο σε προσωπικά δεδομένα
- δεν εξετάζει τους διάφορους παράγοντες και έννοιες που έχουν σχέση με το θέμα και δεν προβαίνει σε κανένα συσχετισμό τους
- χρησιμοποιεί μόνο λίγες από τις διαθέσιμες πληροφορίες και σπάνια καταλήγει σε συμπέρασμα.

Μεταβατικό στάδιο μεταξύ του πρώτου και δεύτερου επιπέδου: Ο φοιτητής χρησιμοποιεί ανεπαρκώς κάποιο σχετικό στοιχείο κάνοντας με ανακρίβεια μία υπόθεση.

17. **Δεύτερο επίπεδο μονο-παραγοντικό, μονο-δομικό.** Ο φοιτητής:

- επιλέγει ένα από τα σχετικά στοιχεία της παρουσίασης και επικεντρώνεται σ' αυτό
- ανταποκρίνεται με περιορισμένο τρόπο, σπάνια συνδέει τμήματα πληροφοριών και δεν δίνει εξηγήσεις
- δεν καταλήγει σε συμπέρασμα ή το συμπέρασμα προκύπτει βιαστικά από λίγα στοιχεία.

Μεταβατικό στάδιο μεταξύ του δεύτερου και τρίτου επιπέδου: Ο φοιτητής επιλέγει δύο σχετικά στοιχεία που δε συμφωνούν, είναι ασυνεπή και αποτρέπουν την εξαγωγή συμπεράσματος.

3. **Τρίτο επίπεδο πολύ-παραγοντικό, παραθετικό, πολύ-δομικό.** Ο φοιτητής:

- επιλέγει δύο ή περισσότερα στοιχεία από την παρουσίαση και τα παραθέτει, αναφέροντάς τα απλώς με μία σειρά, αγνοώντας τις σχέσεις τους
- δε χρησιμοποιεί όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες και δεν επιχειρεί να κάνει συσχετισμούς
- συνήθως δεν καταλήγει σε συμπέρασμα ή οδηγείται σε εναλλακτικό συμπέρασμα ή ακόμα μπορεί να αναφέρει το αναμενόμενο συμπέρασμα αποσπασματικά, χωρίς αυτό να προκύπτει από τα δεδομένα και τη λογική που παρουσίασε πριν
- Ο τόνος στο λόγο του παρουσιάζεται περιγραφικός, δηλωτικός.

Μεταβατικό στάδιο μεταξύ του τρίτου και τέταρτου επιπέδου: Ο φοιτητής αναγνωρίζει κάποια ανακολουθία, αλλά δε μπορεί να την αντιμετωπίσει ή κάνει επί μέρους συσχετισμό των δεδομένων.

4. **Τέταρτο επίπεδο συσχετιστικό, συνδυαστικό, συνθετικό.** Ο φοιτητής:

- χρησιμοποιεί τις περισσότερες ή όλες τις διαθέσιμες πληροφορίες, τις συνδέει με συνεπή τρόπο και τις ενσωματώνει σε ένα εννοιολογικό σχήμα, με το οποίο αντιμετωπίζει και τις αντικρουόμενες καταστάσεις
- αρχίζει να δίνει εξηγήσεις συνδυάζοντας τα στοιχεία και αναζητώντας σχέσεις αίτιου – αποτελέσματος. Έτσι παράγει ένα επιχειρήμα και δεν αρκείται απλώς σε μια παράθεση σχετικών στοιχείων

- η διαδικασία της επαγωγής οδηγεί σε ένα επιστημονικά αποδεκτό συμπέρασμα. Ως εκ τούτου δεν αναφέρεται καμιά εναλλακτική λύση
- Ο τόνος στο λόγο του είναι επεξηγηματικός.

Μεταβατικό στάδιο μεταξύ του τέταρτου και πέμπτου επιπέδου: Ο φοιτητής αναγνωρίζει τη σχετικότητα της επεξήγησης αλλά γενικεύει ανεπαρκώς. Θεωρητικά θα μπορούσε να υπάρξει ένα ακόμα ανώτερο επίπεδο το οποίο κρίνεται πολύ προχωρημένο και το οποίο θα ονομάζονταν

5. **Πέμπτο επίπεδο θεωρητικής γενίκευσης, εκτεταμένης θεώρησης.** Ο φοιτητής:

- χρησιμοποιεί πληροφορίες που δεν περιλαμβάνονται στα δεδομένα, γενικευμένες επιστημονικές αρχές που δείχνουν ότι το παράδειγμα είναι μια μόνο πιθανή περίπτωση ενός φαινομένου μεγάλης εμβέλειας, που επεκτείνεται σε άλλες περιπτώσεις
- κάνει νέες υποθέσεις που βασίζονται σε προηγούμενα λογικά αιτιολογημένα συμπεράσματα
- δεν επιδιώκει να προσδιορίσει ένα ορισμένο ή περιορισμένο συμπέρασμα, αλλά δοκιμάζει, υποθέτει και κρίνει άλλες πιθανές απαντήσεις που θα ταίριαζαν στο ερώτημα
- Ο τόνος στο λόγο του εμφανίζεται συμπερασματικός.

Ως παράδειγμα ταξινόμησης απαντήσεων λαμβάνεται μια συγκεκριμένη ερώτηση (ερώτηση 1, πίνακας 1).

Πίνακας 1: Παράδειγμα ταξινόμησης απαντήσεων της ερώτησης 1 κατά SOLO.

ΕΠΙΠΕΔΟ	ΑΠΑΝΤΗΣΗ ΕΡΩΤΗΣΗΣ 1
1 ^ο προδομικό	Δεν απαντά, απαντά λάθος ή περιγράφει απλά την καμπύλη
2 ^ο μονοδομικό	Στην περιγραφή της καμπύλης αναφέρει απλά την εξέλιξη μόνο ενός από τα μεγέθη - παράγοντες: θέση ή ταχύτητα ή είδος κίνησης
3 ^ο πολυδομικό	Στην περιγραφή της καμπύλης αναφέρει την εξέλιξη δύο ή περισσότερων παραγόντων χωρίς να τους συσχετίζει κατάλληλα
4 ^ο συσχετιστικό	Στην περιγραφή της καμπύλης αναφέρει την εξέλιξη δύο ή περισσότερων παραγόντων, κάνει τους κατάλληλους συσχετισμούς και καταλήγει σε συμπέρασμα
5 ^ο εκτεταμένης θεώρησης	Λαμβάνει υπόψη τη μορφή της καμπύλης, συνδυάζει τη μαθηματική έννοια με το φυσικό μέγεθος, συμπεραίνει για το είδος της κίνησης, εντάσσει τη συγκεκριμένη περίπτωση στο γενικό πλαίσιο

Αποτελέσματα και σχόλια

Τα αποτελέσματα που απεικονίζουν τη μετάβαση των φοιτητών εμφανίζονται στον πίνακα 2. Οι τιμές αντιστοιχούν στους μέσους όρους καταγραφής του αντίστοιχου επιπέδου SOLO για τους φοιτητές κάθε ομάδας (1: προδομικό, 2: μονοδομικό, 3: πολυδομικό, 4: συσχετιστικό, 5: επίπεδο εκτεταμένης θεώρησης). Οι δεκαδικοί αριθμοί σημαίνουν ότι οι μέσοι όροι αντιστοιχούν σε μεταβατικά επίπεδα SOLO.

Όλοι οι φοιτητές βελτίωσαν το γνωστικό τους επίπεδο μετά το πείραμα. Όπως είναι αναμενόμενο, όλοι οι φοιτητές της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης βρίσκονται τόσο πριν όσο και μετά το πείραμα σε καλύτερο γνωστικό επίπεδο από αυτούς της θεωρητικής. Μάλιστα οι τελευταίοι μόνο σε μία ερώτηση ξεπέρασαν το τρίτο πολυδομικό επίπεδο, επίπεδο που ξεπερνούν όλοι σχεδόν οι φοιτητές της άλλης κατηγορίας χωρίς όμως να καταγράφονται υψηλά γνωστικά επίπεδα και γι' αυτούς. Χαρακτηριστικό είναι ότι πολύ μεγαλύτερη βελτίωση φάνηκε στους φοιτητές που προέρχονται από τη θεωρητική κατεύθυνση σε αντίθεση με αυτούς της θετικής και τεχνολογικής. Ο κυριότερος λόγος είναι ότι οι φοιτητές της θεωρητικής είχαν



περιθώριο βελτίωσης ξεκινώντας από το χαμηλότερο γνωστικό επίπεδο να μετακινηθούν στο επόμενο ιεραρχικό επίπεδο επισημαίνοντας μόνο τους παράγοντες της κλίσης και του εμβαδού, χωρίς όμως να μπορούν να αξιοποιήσουν αυτές τις μαθηματικές έννοιες με τα αντίστοιχα φυσικά μεγέθη. Οι φοιτητές της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης ξεκινούν σχεδόν όλοι από το τρίτο, πολυδομικό επίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι αναγνωρίζουν τους παράγοντες που πρέπει να συσχετίσουν ώστε να φτάσουν σε αποδεκτό επιστημονικά συμπέρασμα, αλλά φαίνεται ότι δεν μπορούν να εφαρμόσουν τις μαθηματικές έννοιες στο πλαίσιο της φυσικής κυρίως σε επιμέρους τμήματα των γραφικών παραστάσεων και να καταλήξουν σε συμπέρασμα για τα είδη της κίνησης.

Πίνακας 2: Μέσοι όροι καταγραφής του αντίστοιχου επιπέδου SOLO των φοιτητών.

		ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΘΕΩΡΗΤΙΚΗ (N = 46)		ΚΑΤΗΓΟΡΙΑ ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ (N = 38)	
		ΟΜΑΔΑ 1 (N = 23)	ΟΜΑΔΑ 2 (N = 23)	ΟΜΑΔΑ 1 (N = 19)	ΟΜΑΔΑ 2 (N = 19)
ΕΡΩΤΗΣΗ 1	ΠΡΙΝ	1.5	1.6	3.2	3.5
$x(t) \rightarrow v(t)$	ΜΕΤΑ	2.5	2.8	3.7	3.9
ΕΡΩΤΗΣΗ 2	ΠΡΙΝ	1.4	1.3	2.8	3.2
$v(t) \rightarrow x(t)$	ΜΕΤΑ	2.8	2.7	3.6	3.7
ΕΡΩΤΗΣΗ 3	ΠΡΙΝ	2.0	2.3	4.0	3.8
$v(t) \rightarrow a(t)$	ΜΕΤΑ	3.4	3.1	4.1	4.0
ΕΡΩΤΗΣΗ 4	ΠΡΙΝ	1.7	1.9	3.2	2.9
$a(t) \rightarrow v(t)$	ΜΕΤΑ	2.8	2.9	3.5	3.6

Επισημαίνεται ότι κατά τη σύγκριση των δύο ομάδων (ομάδα 1: αλλαγή συστήματος αναφοράς, ομάδα 2: αλλαγή επιτάχυνσης) στις δύο κατηγορίες φοιτητών, παρατηρείται διαφορετική συμπεριφορά. Οι φοιτητές της θεωρητικής παρουσιάζουν μεγαλύτερη βελτίωση κατά τη μετάβαση μεταξύ των μεγεθών $x(t)$ και $v(t)$ κατά τη μεταβολή της επιτάχυνσης, ενώ συμβαίνει το αντίθετο με τους φοιτητές της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης. Όσον αφορά στη μετάβαση μεταξύ των καμπυλών $v(t)$ και $a(t)$, οι φοιτητές της θεωρητικής κατεύθυνσης παρουσιάζουν μεγαλύτερη βελτίωση κατά την αλλαγή του συστήματος αναφοράς, ενώ συμβαίνει το αντίθετο με τους φοιτητές της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης.

Μετά το τέλος της διαδικασίας ζητήθηκε από τους φοιτητές να αξιολογήσουν κατά πόσο οι δραστηριότητες που πραγματοποίησαν τους διευκόλυναν στις απαντήσεις των ερωτήσεων. Η ομάδα 1 της θεωρητικής κατεύθυνσης με την αλλαγή του συστήματος αναφοράς δήλωσε ότι οι δραστηριότητες τους βοήθησαν μέτρια και αρκετά. Η ομάδα 2 με την αλλαγή της επιτάχυνσης εκτίμησε ότι βοηθήθηκε από μέτρια ως πολύ. Οι φοιτητές της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης και στις δύο ομάδες εκτίμησαν ότι οι δραστηριότητες τους βοήθησαν από λίγο ως αρκετά.

Συμπεράσματα

Η παρούσα εργασία διερευνά την εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών της κλίσης και του εμβαδού στο πλαίσιο των αναπαραστάσεων των φυσικών μεγεθών $x(t)$, $v(t)$ και $a(t)$ στην ευθύγραμμη μεταβαλλόμενη κίνηση σε δύο διαφορετικές περιπτώσεις, κατά την αλλαγή του συστήματος αναφοράς και κατά την αλλαγή της επιτάχυνσης κατά τη διάρκεια ενός πειράματος με σύστημα MBL.

Διαπιστώνεται δυσκολία κατά τη μετάβαση των φοιτητών μεταξύ των διαφορετικών αναπαραστάσεων των φυσικών μεγεθών που περιγράφουν την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.

Επίσης, δεν παρατηρείται ούτε μεγάλη διαφορά στη δεξιότητα μετάβασης μεταξύ των δύο ομάδων (αλλαγή συστήματος αναφοράς και επιτάχυνσης) σε κάθε κατηγορία (θεωρητική και θετική – τεχνολογική).

Διαπιστώνεται μεγαλύτερη βελτίωση των φοιτητών της θεωρητικής κατεύθυνσης, αλλά μεταξύ χαμηλών ιεραρχικά γνωστικών επιπέδων. Οι φοιτητές της θετικής και τεχνολογικής κατεύθυνσης παραμένουν στο τρίτο με τέταρτο επίπεδο SOLO. Αυτό μπορεί να ερμηνευθεί από το ότι έχουν τις βασικές γνώσεις και δεξιότητες να χειρισθούν μαθηματικές έννοιες και εκφράσεις, αλλά δεν μπορούν να τις εφαρμόσουν αποτελεσματικά στο πλαίσιο προβλημάτων φυσικής.

Ανεξάρτητα από τα ευρήματα της μελέτης, η παρούσα διδακτική παρέμβαση φαίνεται ότι διευκολύνει τους φοιτητές στην εφαρμογή μαθηματικών εννοιών στη φυσική λαμβάνοντας υπόψη τα εμπόδια που αυτοί συναντούν λόγω του διαφορετικού πλαισίου γιατί:

1. Η εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών πραγματοποιείται σε διαφορετικές αναπαραστάσεις ($x(t)$, $v(t)$, $a(t)$) που αντιστοιχούν σε διαφορετικά φυσικά μεγέθη
2. Συσχετίζει τις αναπαραστάσεις των φυσικών μεγεθών με την εφαρμογή των αντίστοιχων μαθηματικών εννοιών, τόσο σε ποιοτικό όσο και σε ποσοτικό επίπεδο
3. Συνδέει τις αλλαγές των αναπαραστάσεων με την εφαρμογή των ίδιων των μαθηματικών εννοιών και τις διαφορετικές τιμές των φυσικών μεγεθών.

Βιβλιογραφία

Μικρόπουλος, Α. (2006). Ο υπολογιστής ως γνωστικό εργαλείο. Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

Μπέλλου, Ι. (2003). Ποιοτική αξιολόγηση μαθησιακών αποτελεσμάτων μαθητών μετά την αλληλεπίδρασή τους με εκπαιδευτικό λογισμικό. Πρακτικά 2^{ου} Πανελληνίου Συνεδρίου των Εκπαιδευτικών για τις ΤΠΕ 'Αξιοποίηση των Τεχνολογιών της Πληροφορίας και της Επικοινωνίας στη Διδακτική Πράξη', (σ.85-95), Σύρος.

Ainley, J., Nardi, E., & Pratt, D. (1999). Constructing Meaning for Formal Notation in Active Graphing, in I. Scwank (Ed.) Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education, from http://www.fmd.uni-osnabrueck.de/ebooks/erme/cerme1-proceedings/cerme1_contents1.html.

Arons, A.B. (1990). A Guide to Introductory Physics Teaching, Wiley.

Beichner, R. (1994). Testing student interpretation of kinematics graphs. American Journal of Physics, 62(8), 750-762.

Biggs, J.B. & Collins, K.F. (1982). Evaluating the quality of learning: The SOLO taxonomy. Academic Press, New York.

Dunham, P. H. & Osborne, A. (1991). Learning how to see: Students' graphing difficulties. Focus on Learning Problems in Mathematics, 13(4), 35-49.



Ellermeijer, T. and Heck, A. (2003). Differences between the use of mathematical entities in mathematics and physics and the consequences for an integrated learning environment, In M. Michelini and M. Cobal, (eds), *Developing Formal Thinking in Physics*, 52-72, Proceedings of the first international GIREP seminar, 2-6 September 2001, University of Udine, Italy.

Hadjidemetriou, C. & Williams, J. S. (2000). Assessing Graphical Literacy In Year 10 Mathematics pupils. British Educational Research Association Student Symposium, from <http://www.lta.education.manchester.ac.uk/ch/ch1.pdf>

Lapp, D. A. (1999). Using Calculator-Based Laboratory Technology: Insights from Research. Presented at the Fourth International Conference on Technology in Mathematics Teaching, Plymouth, United Kingdom, from <http://calcnet.cst.cmich.edu/faculty/lapp/ICTMT1999.pdf>.

Lenton, G., Stevens, B., & Illes, R. (2000). Numeracy in science: Pupils' understanding of graphs. *School Science Review*, 82(299), 15-23.

Linn, M. C., Layman, J. W., & Nachmias, R. (1987). Cognitive consequences of microcomputer-based laboratories: Graphing skills development. *Contemporary Education Psychology*, 12(3), 244-253.

McDermott, L.C., M.L. Rosenquist and E.H. van Zee. (1987). Student difficulties in connecting graphs and physics: Examples from kinematics. *American Journal of Physics*, 55(6), 503-513.

Ozgun-Koca, S. Asli, (2001). The Effects of Multiple Linked Representations on Student Learning in Mathematics. Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, (pp. 997-1004), from http://www.eric.ed.gov/ERICDocs/data/ericdocs2sql/content_storage_01/0000019b/80/1b/10/8b.pdf.

Redish, E. (2005). Problem Solving and the Use of Math in Physics Courses. Presented at the conference *World View on Physics Education in 2005: Focusing on Change*, Delhi, from <http://www.physics.umd.edu/perg/papers/redish/IndiaMath.pdf>.

Roth, W-M. & Bowen, G.M. (2001). Professionals read graphs: a semiotic analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 32(2), 159-194.

Saul, J. M., Wittmann, M. C., Steinberg, R. N. and Redish, E. F. (1996). Student Difficulties with Math in Physics: Why Can't Students Apply What They Learn in Math Class? Presented at the College Park meeting of the AAPT, from <http://www.physics.umd.edu/ripe/perg/papers/redish/talks/aapt96m.htm>.

Selden, J. & Selden, A. (2001). Examining How Mathematics is used in the Workplace, from http://www.maa.org/t_and_1/sampler/rs_6.html.

Svec, M. T. (1999). Improving graphing interpretation skills and understanding of motion using microcomputer-based laboratories. *Electronic Journal of Science Education*, 3(4), from <http://unr.edu/homepage/jcannon/ejse/ejse.html>.

Thornton R. K. (1987). Tools for scientific thinking - microcomputer-based laboratories for teaching physics. *Physics Education*, 22, 230-238.

Thornton R. K. (1989). Tools for scientific thinking, learning physical concepts with real-time laboratory measurements tools, in Redish E.F. (Ed.) *Proceedings of Conference of Computers in Physics Instruction* (pp. 177-189), Addison Wesley, Reading.

Trumper, R. & Gelbman, M. (2002). What Are Microcomputer-Based Laboratories (MBLs) for? An Example from Introductory Kinematics. *Journal of Computers in Mathematics and Science Teaching*, 21(3), 207-227.